Problemi ed equazioni

1. Motivazioni

L'introduzione dell'algebra nella scuola media presenta problemi e difficoltà diverse per l'alunno, quali ad esempio:

a. Riuscire a risolvere un problema aritmeticamente;
b. Riuscire a tradurre un problema in linguaggio formale;
c. Riuscire a svolgere calcoli non numerici.

Vediamo alcune motivazioni per introdurre concetti e tecniche algebriche nel curricolo matematico:

1) L'acquisizione del metodo scientifico passa anche attraverso la capacità di usare il simbolo indipendentemente dall'ente concreto che rappresenta. Diventa fondamentale quindi insegnare come tradure fatti, fenomeni, entità concrete in simboli astratti e come operare su di essi;
2) D'altra parte il conseguimento di finalità collegate al punto precedente porta ad aiutare lo studente a passare dall'operazionalità concreta a quella formale sottoponendogli esperienze e situazioni stimolanti per questo scopo.
3) Collegate al punto precedente è il fatto che lo studente nella scuola dell'obbligo, di fronte a problemi che coinvolgono sequenze di operazioni, molto spesso è in difficoltà, non riesce proprio perché privo di adeguati schemi e strutture di analisi ad avere una rappresentazione mentale unificante "del problema e della sua risoluzione". Diventa importante intervenire su queste abilità in una società industrializzata che presenta quotidianamente difficoltà di questo genere.
4) Occorre inoltre ribadire che data l'attuale struttura dei programmi della scuola secondaria occorre fornire agli alunni quell'introduzione alle tecniche algebriche di cui in genere non si fa carico la scuola superiore.
5) Infine dal punto di vista culturale quest'argomento si presta all'avvio di una discussione storica che descriva in che modo l'ambiente sociale, economico, politico ha interagito con la formazione dei concetti matematici (così come si presta la storia dei numeri o della geometria…)

2. **Finalità e obiettivi specific**i

Finalità:

1) Sviluppare quelle capacità intellettive e operative che permettono al bambino, di fronte ad un problema di comprenderne i termini e di costruire la strategia di risoluzione.
2) Capire il passaggio dall'aritmetica all'algebra, acquisendone i concetti più semplici.
3) Cogliere le relazioni tra sviluppo storico del passaggio dall'aritmetica all'algebra e sviluppo socio-economico.

Obbiettivi specifici:

1) Riferiti alla finalità n.1:
   1.1 riuscire a cogliere e collegare le informazioni del problema in funzione di ciò che è richiesto;
   1.2 individuare la strategia di risoluzione;
   1.3 riuscire ad applicare le procedure di calcolo necessarie.

Questi tre momenti fondamentali del problem-solving vanno esaminati attentamente.

Nella risoluzione dei problemi gli alunni seguono strategie diverse rispetto agli adulti e gran parte degli interventi "creativi" porta spesso a errori. Questo succede soprattutto nei problemi in cui sono presenti elementi verbali e non schematici (un esempio di schema può essere una frase aperta). L'alunno tende infatti a ricavare dal testo del problema informazioni non date o inutili dal punto di vista di una corretta soluzione, in base ad una rappresentazione personale del problema stesso.

Per essere in grado di risolvere correttamente un problema, il bambino deve essere allora capace di:

1.1.1 riformulare il problema in parole a lui comprensibili;
1.1.2 identificare ciò che è noto da ciò che si deve trovare e visualizzare il problema con una rappresentazione schematica;
1.1.3 di fronte ad un problema, non risolvibile perché complesso o perché diverso dai precedenti, sa scomporlo in sotto parti più semplici, note e porle in sequenza ordinata, scrivendosi, ad esempio, dei diagrammi di flusso.

Dal punto di vista delle procedure di risoluzione va sviluppata l'abilità di ordinare le operazioni sotto forma di espressioni (con l'uso delle parentesi o di diagrammi di flusso).

2) L'algebra va presentata come il linguaggio generale delle varie situazioni aritmetiche. Ciò costituisce la struttura elementare dell'algebra e va costruita nell'arco del triennio. Quest'acquisizione sarà possibile solo se il pensiero dell'alunno è stato aiutato a costruirsi schemi rappresentativi (di tipo diverso) di fatti, fenomeni ecc., attraverso l'astrazione da specifiche situazioni concrete. D'altra parte la comprensione dei concetti fondamentali dell'algebra facilita lo sviluppo di tecniche di rappresentazione formale, unificante fatti e fenomeni ecc., che dal punto di vista empirico sono diversi.

Possiamo puntualizzare i seguenti obbiettivi specifici:

2.1 tradurre proposizioni chiuse del linguaggio comune in operazioni, analizzando frasi del tipo:" se aggiungo 5 a 26 ottengo 31", definendo le corrispondenze tra simboli e parole.
2.2 Tradurre frasi aperte espresse in linguaggio comune in frasi aperte di tipo matematico, attraverso l'individuazione dell'incognita.
2.3 Tradurre frasi aperte, a una variabile, la cui soluzione è univoca (equazione); frasi aperte, a una variabile, che ammettono più soluzioni (disequazione) e frasi aperte a più variabili dei due casi precedenti.
2.4 Saper leggere le formule come equazioni, riferite a una data grandezza. Saperle utilizzare per la ricerca della grandezza interessata attraverso la loro scomposizione in sequenze ordinate e quindi saper operare l'inversione del procedimento a partire dallo stato finale per giungere a quello iniziale (incognito).
2.5 Saper costruire le formule cogliendo le relazioni tra grandezze. Questi obiettivi sono in stretta connessione con altri aspetti del programma e in particolare con lo studio delle relazioni e delle operazioni.
2.6 Familiarizzare con gli aspetti più semplici del calcolo letterale.

3) La finalità n.3 è direttamente collegabile a quelle precedenti in quanto il suo scopo è di presentare attraverso un opportuno excursus storico come le origini dell'algebra siano molto più concrete di quello che può sembrare. In modo particolare gli alunni dovranno cogliere che:

2.7 l’algebra costituisce la conclusione di un processo di sviluppo del calcolo nelle società mercantili (da quelle indiane a quelle europee);
2.8 l’algebra costituisce il punto di partenza dello sviluppo della scienza moderna.

3. Contenuti

a) Analisi e risoluzione di problemi geometrici.
b) Analisi e soluzione di problemi tra grandezze provenienti da esperienze comuni.
c) Uso e costruzione di diagrammi di flusso, espressioni (regole d’ordine e punteggiatura), tabelle ecc.
d) Discussione delle tecniche di risoluzione di equazioni lineari di primo grado a partire dalle operazioni dirette e inverse, graficamente (intersezione di rette nel piano cartesiano) e infine utilizzando i due principi di risoluzione algebrica.
e) Discussione delle tecniche grafiche di risoluzione di disequazioni di primo grado a una o due variabili.
f) Introduzione di problemi risolvibili con la tecnica della programmazione lineare.

4. Strategie d’intervento, metodi e materiali

1. Problem-solving: la capacità di risolvere un problema può essere sviluppata analizzando le variabili strutturali che sembrano contribuire alla complessità dei problemi. Queste sono:
   1.1 il numero di differenti operazioni aritmetiche necessarie per arrivare alla soluzione;
   1.2 la sequenza variabile, cioè se il problema è risolvibile tramite le stesse operazioni, nello stesso ordine, di un problema precedente;
   1.3 la lunghezza del problema, cioè il numero di parole nel testo;
   1.4 la complessità grammaticale del linguaggio usato nel problema;
   1.5 se è richiesta o meno la conversione di unità di misura.

L’identificazione di queste variabili permette di formulare un gruppo di problemi di determinato livello di difficoltà in modo da poter riconoscere come si sviluppano le fasi mentali del ragionamento. Inoltre bisogna abituare i ragazzi a costruire una rappresentazione fisica del problema in modo da visualizzare i dati del problema e rendere più facile individuare i calcoli per la risoluzione. Il problema deve essere presentato con tecniche diverse (grafiche, fisiche, simboliche), non solo verbali, per abituare a leggere situazioni diverse. Infine può essere di aiuto, in certe fasi, prospettare nel problema alcune istruzioni esplicite sule strategie di risoluzione da seguire.

2. L’algebra può essere insegnata nella scuola dell’obbligo (Sawyer: Guida all’insegnamento della Matematica: algebra intuitiva) purché non si pretenda di insegnare direttamente il linguaggio formale, ma invece si costruiscano situazioni che siano comprensibili per gli alunni.
   Ad esempio le equazioni possono essere introdotte attraverso “frasi aperte” le quali sono la prima traduzione matematica di una proposizione linguistica. La frase aperta e quindi la sua traduzione algebrica in equazione possono essere ricavate da frasi del tipo “ un numero aggiunto a cinque dà sedici” (approccio che permette di sistematizzare le relazioni tra proposizioni linguistiche e operazioni aritmetiche) sia da problemi verbali che grafici.
   Le equazioni lineari di primo grado a un’incognita saranno prima simbolizzate mediante l’uso di grafi in cui risulti evidente lo stato iniziale, il percorso, lo stato finale. Le loro soluzioni quindi consisteranno, in questa fase, nella ricostruzione del procedimento inverso per calcolare il valore dell’incognita.

Si passerà quindi all'analisi di problemi più complessi ad esempio un problema a due incognite: "Un gruppo di amici entra in un bar e ordina tre bibite e due paste, spendono 28 euro. Nello stesso tempo due altri clienti prendono una bibita e una pasta spendendo 12 euro. Quanto costa il caffè e l'aranciata?". Questo problema contiene due incognite e quindi sottende un sistema a due equazioni di primo grado. Ma può essere rappresentato con tabelle a doppia entrata:

sommare		N aranciate			
		1	2	3	4
N caffè	1				
	2				
	3				
	4				

Alcuni alunni cercheranno di indovinare i loro modi di soluzione. Quest'approccio può essere permesso purché siano abituati a verificare le loro conclusioni in modo che siano in accordo con le affermazioni del problema. L'abitudine a tirare a indovinare le soluzioni può essere ridotta aumentando i valori numerici del problema. Il passo successivo consiste nell'introduzione dell'equazione del tipo: $x+y=$
Occorre controllare che l'alunno sia in grado di associare il simbolo letterale alle quantità della grandezza cui ci si riferisce.
Questa prima astrazione è quella che richiede più attenzione. Per arrivarci è opportuno utilizzare più rappresentazioni concrete dell'incognita (ad esempio rappresentando l'incognita con un sacco chiuso che contiene una certa quantità di oggetti o valori…). Successivamente si dovranno costruire equazioni con coefficienti, nel nostro esempio precedente: $2x+2y=$
Anche questa seconda astrazione richiede molta attenzione in quanto non ci si può aspettare una risposta precisa se l'alunno è ancora in dubbio sul significato ad esempio della lettura.
L'approccio migliore sembra essere quello grafico nel far vedere ad esempio, in $2x+2y= 2a$
Sia il doppio rispetto a $x+y=a$ (dove a indica una quantità nota!) facendo vedere che $2x+2y$ vale come $x+x+y+y$
Infine si tratta di dare un senso a equazioni del tipo. $2x+y=$…
Si può operare sperimentalmente in questo modo:
"si chiede agli alunni di pensare a due numeri che sommati tra loro facciano 1200 (oppure 12), chiamandoli x e y e poi di fare $2x+y$ (descrivendo a parole la sequenza di operazioni…) e poi di fare : $2x+2y$ e poi $2x+3y$ ….
Si raccolgono i risultati in una tabella:

	Alunno A	Alunno B	Alunno C	Alunno D
$2x+y$				
$2x+2y$				
$2x+3y$				

Dall'osservazione della tabella riassuntiva i ragazzi possono cercare di trovare i numeri pensati dagli altri osservando le regolarità e deducendone le cause.

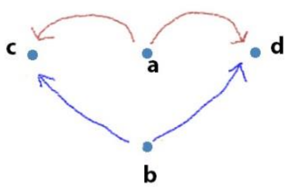
E' importante far cogliere che a partire da $x+y=12$ è possibile dire quanto sarà: $2x+2y$ oppure $3x+3y$ mentre a partire da $2x+y=$ non è possibile ricavare intuitivamente $3x+2y$ ecc.
Ritornando al nostro problema,

noto x+y=12 e 2x+3y=28
attraverso schematizzazioni grafiche è possibile ricavare che tra le due equazioni:

2x+2y=24 e 2x+3y=28
C'è un valore y di differenza e quindi è possibile ricavarlo…

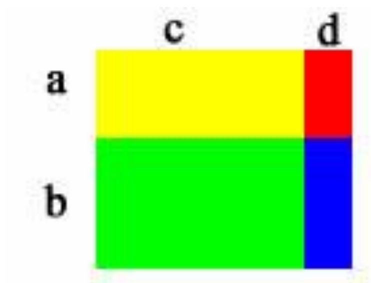
L'algebra richiede l'introduzione di elementi di calcolo letterale. Anche qui l'approccio cercherà di restare sul piano concreto utilizzando modelli diversi.
Ad esempio il prodotto di due binomi: (a*+b)*(c+d)=
potrebbe essere introdotto attraverso:

1. Un modello di percorsi:



Quanti sono i percorsi possibili?

2. Un modello geometrico



Quanto valgono le aree di questi rettangoli?

3. Un modello aritmetico:

moltiplica	a	b
c		
d		

E poi somma…