

## Ritorno al 1979... I nuovi programmi della scuola media, la geometria: alcune osservazioni e riflessioni sempre valide

I temi dei “Nuovi Programmi del 1979” (da ora definiti N.P.) richiamano 3 caratteristiche significative della geometria:

1) La geometria è un modello matematico dello spazio fisico. Cioè gli enti matematici punto, retta, piano, angolo ecc. sono idealizzazioni di punti, rette, piani e angoli fisici e le relazioni che si instaurano tra gli enti geometrici sono molto simili alle relazioni fra i loro corrispondenti fisici.

2) La geometria, in base all'idea espressa da Klein nel suo Programma di Erlangen del 1872, può essere considerata come lo studio di quelle proprietà delle figure che rimangono invariate quando lo spazio è assoggettato a un gruppo di trasformazioni. Da questo punto di vista lo studio delle figure congruenti, nella geometria piana euclidea, rientra nell'analisi delle isometrie del piano.

3) La geometria è intimamente legata all'algebra. Sin da quando Descartes e Fermat inventarono la geometria analitica, sappiamo che i concetti della geometria possono essere espressi sotto forma algebrica. Così un punto del piano euclideo può essere definito come una coppia ordinata  $(x;y)$  di numeri reali, una retta nel piano può essere definita dall'equazione della forma  $ax+by = c$  e così via. Ovviamente il discorso può essere visto anche in senso opposto: i concetti algebrici possono cioè essere espressi attraverso concetti geometrici.

4) Non viene invece preso in considerazione dai N.P. l'aspetto della geometria come sistema assiomatico, come sistema cioè in cui vengono poste delle proposizioni primitive, o assiomi, da cui, per deduzione vengono dimostrati i vari teoremi.

Questo orientamento dei N.P. trova giustificazioni di carattere: a) epistemologico, b) psico pedagogico.

a) L'esigenza, sul piano didattico, di partire da un corso a carattere sperimentale dove gli assiomi trovino le loro radici intuitive, è conseguente dal punto di vista epistemologico all'ipotesi che l'ente geometrico si formi nella mente umana per astrazione, a partire da oggetti reali e da esperienze su questo.

Costituisce parte integrante delle teorie psicologiche oggi più comunemente accettate (e ci riferiamo in particolare agli psicologi che si rifanno, almeno come origine a Piaget) l'idea che la base di ogni apprendimento è l'attività del b. che interagisce con il suo ambiente sociale e fisico. Basti pensare ai tre modi attraverso cui, secondo Bruner, la conoscenza è rappresentata (azione - immagine - simbolo) e alle esperienze didattiche operate da Dienes partendo da questo presupposto. Del resto l'esperienza didattica quotidiana mostra chiaramente che il b. di 11-12 anni segue con difficoltà anche semplici ragionamenti a carattere ipotetico – deduttivo.

L'insegnamento della geometria a livello di scuola dell'obbligo dovrebbe in conclusione mirare a formare quei concetti, a far intravedere quelle relazioni, a introdurre quei tipi di ragionamento che verranno eventualmente approfonditi e sistematizzati all'interno di un sistema assiomatico - deduttivo in seguito e che comunque sono di per sé autosufficienti per far capire, a livello elementare la struttura interna della disciplina.

### MOTIVAZIONI ALL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

1) Fornisce un modello di rappresentazione formale della realtà (ci si riferisce in particolare alla rappresentazione di tipo euclideo);

2) è un contenuto adatto per sviluppare le capacità logiche che, a partire dall'osservazione, portano alla formazione del pensiero astratto (è da tener presente che è proprio nell'età a cui ci riferiamo che la mente si apre all'astrazione). Lo studio della geometria infatti se in una prima fase è basato su osservazioni di oggetti e materiali concreti, non presuppone particolari requisiti di tipo matematico.

## **FINALITÀ**

*1) Sviluppo delle capacità logiche che sono necessarie per l'acquisizione del metodo scientifico (capacità di osservare, analizzare le proprietà degli enti osservati, coglierne le relazioni e sistemarle all'interno di modelli di rappresentazione via via più astratti).*

*2) Introduzione all'acquisizione della struttura propria della materia, cioè dei contenuti dei concetti e dei metodi che la caratterizzano.*

La finalità" 2) si potrà articolare nei seguenti **obiettivi intermedi**:

*2.1) raggiungimento della consapevolezza che la Geometria è lo studio dello spazio, delle sue proprietà e delle sue relazioni tra queste proprietà;*

*2.2) concetto di misura*

*2.3) raggiungimento della consapevolezza che sulle figure geometriche si possano operare diversi tipi di trasformazioni e che, in ogni trasformazione, alcune proprietà variano ed altre restano invariate;*

*2.4) raggiungimento della consapevolezza che esiste una corrispondenza biunivoca tra punti e coppie di coordinate nel piano cartesiano e che quindi i concetti della geometria possono essere espressi in termini algebrici e viceversa.*

## **CONTENUTI**

I contenuti da trattare nel triennio in relazione agli obiettivi sono:

a) concetto di solido, superficie e linea intesi in senso topologico (e cioè solido come porzione di spazio, superficie come confine dei solidi nello spazio, linea come confine delle superfici e i punti come confine della linea) (Dienes);

b) concetto di angolo;

c) riconoscimento degli elementi di una figura geometrica e di alcune relazioni tra loro esistenti;

d) concetto di misura (lunghezza, area, volume);

e) trasformazioni geometriche;

f) proiezioni prodotte da sorgenti poste all'infinito (raggi paralleli) e quindi ed in particolare isometrie piane;

g) proiezioni prodotte da sorgenti puntiformi e in particolare studio delle similitudini attraverso costruzioni omotetiche, ingrandimenti e riduzioni in scala;

h) il sistema di riferimento cartesiano, con particolare riguardo alla lettura di carte geografiche e topografiche;

i) definizione di retta orientata, coordinate di un punto nel piano e funzioni cartesiane;

l) rappresentazione e studio di figure geometriche su un piano cartesiano, note le coordinate dei vertici;

I contenuti relativi ai punti 2.1,2.2,2.3 come sottolineato chiaramente nei N.P., non vanno trattati in modo sequenziale ma integrandosi a vicenda, vanno visti come punti costituenti un reticolo attraverso il quale l'insegnante può definire un percorso, più o meno ramificato a seconda delle esigenze e che verrà svolto nell'arco del triennio. Ad esempio, un primo approccio al concetto di misura si avrà nel primo anno attraverso misure (e quindi spostamenti) di diversi tipi di grandezze, utilizzando le abilità acquisite alle elementari. La misura verrà quindi effettuata su enti geometrici come il segmento e, dopo l'introduzione dei concetti di equiestensione e di congruenza (concetti che vanno sviluppati attraverso l'uso di isometrie), si passerà alle misure di superfici e infine al volume. Durante questo percorso il concetto di confronto verrà formalizzato in termini di rapporto (ad esempio attraverso l'introduzione dell'algoritmo euclideo per la ricerca del MCD tra segmenti). Il concetto di unità di misura risulterà anche requisito essenziale per introdurre le rappresentazioni nel piano cartesiano, qualora si ritenga opportuno introdurre questo argomento.

## **METODO**

In base ai suggerimenti metodologici dei N.P., si possono individuare le seguenti tappe fondamentali all'interno dell'itinerario didattico:

- a) partire da modelli concreti di tipo dinamico che permettano cioè l'operatività su di essi;
- b) suscitare problematizzazione;
- c) stimolare le capacità intuitive;
- d) verificare le intuizioni attraverso l'osservazione e la manipolazione diretta e/o il ragionamento (pensare in termini di relazioni, ricercare elementi varianti e invarianti, analogie e differenze rispetto ad altre situazioni note, induzioni e deduzioni);
- e) arrivare ad un momento di sintesi concettuale servendosi dei metodi di schematizzazione propri della matematica e più adatti all'argomento in esame.

L' insegnante può guidare gli alunni lungo questo percorso servendosi di schede che possono essere analizzate individualmente o in gruppo. In genere è bene integrare i due momenti in quanto, se da una parte non bisogna perdere vista gli effetti produttivi della discussione e del lavoro in gruppo, dall'altra non si deve dimenticare che la discussione rimarrà sterile se si svolgerà prima che i bambini abbiano compiuto dei tentativi, prima che si siano sufficientemente impegnati ed abbiano preso confidenza con il problema da risolvere.

In sintesi, l'approccio didattico indicato pone l'accento più che alla soluzione del problema, a come è posto, al pensiero produttivo (Wertheimer) al percorso seguito per arrivare alla risposta, in modo da aiutare a formare negli alunni una mentalità logica e ricercatrice.

L'insegnante avrà quindi il più possibile la funzione di guida e coordinatore delle esperienze degli alunni. L'uso di schede favorisce l'intervento individualizzato in quanto dà all'insegnante lo spazio necessario per seguire quegli alunni che non possiedono sufficiente autonomia di lavoro.

## **PRECISAZIONI SUI MATERIALI**

Il ricorso al materiale concreto deve essere concepito in termini operativi, costruttivi.

Questo significa, nell'insegnamento della geometria, non limitarsi ad un approccio descrittivo statico dell'oggetto (come ad esempio far osservare le diagonali e i lati di quadrati ritagliati su carta o disegnati, far osservare le facce di un cubo o gli elementi a forma quadrata che si trovano in un oggetto reale...).

Significa far capire le proprietà delle figure in esame attraverso il movimento, la trasformazione continua in altre figure, in modo da far cogliere gli elementi che, nel corso delle trasformazioni restano costanti e quelle che variano. Riferendosi, a titolo esemplificativo, sempre al quadrato, si possono usare pezzi di meccano per costruirlo. Il bambino si accorgerà che il quadrato si deforma facilmente in un rombo. L'insegnante quindi porterà la sua attenzione sulla costanza della somma degli angoli, sulla variazione dell'area, sulla variazione della somma delle diagonali stimolandolo con domande opportune. Emma Castelnuovo sottolinea in proposito l'importanza dei casi limite (ad esempio il rombo schiacciato in segmento) in cui la figura si materializza e attraverso cui il bambino intuisce meglio la costanza o la variabilità della funzione in esame. Seguendo tale metodologia il b. arriverà da sé alla definizione, senza che nessun concetto gli venga imposto dall'alto. È interessante osservare poi che un materiale di tipo operativo rispecchia anche la struttura della matematica moderna dove non vengono studiati gli enti in sé ma piuttosto le operazioni che legano gli enti. Da queste considerazioni emergono due indicazioni per la scelta dei materiali da utilizzare: i materiali devono essere "mobili" e quindi artificiali. È molto difficile infatti che un oggetto reale si presti all'approccio dinamico e quindi problematizzante, precedentemente descritto. Anche Dienes sottolinea come, a differenza degli stimoli allo studio delle scienze fisiche o biologiche, abbondantemente presenti nella realtà, nella vita quotidiana le occasioni di esperienze matematiche che non si riducono al semplice calcolo ed a osservazioni statistiche sono molto limitate.

#### **STUDI DI PIAGET E WERTHEIMER SULL'ACQUISIZIONE DEL CONCETTO DI MISURA DI SUPERFICI**

Piaget ha mostrato con molta chiarezza quanto sia psicologicamente complessa, in realtà, un'operazione come quella di misura che un adulto, abituato a compiere meccanicamente, ritiene semplice e ovvia. L'operazione di misura di un'area è una sintesi di due operazioni base più semplici: la PARTIZIONE, ovvero la suddivisione in tante parti uguali della grandezza da misurare, compiuta attraverso lo SPOSTAMENTO ITERATIVO della grandezza più piccola, utilizzata come unità di misura.

Su tale sintesi si innesta poi un'altra operazione, che è LA NUMERAZIONE delle varie parti in cui la grandezza da misurare è stata suddivisa. Sia nella partizione della grandezza da misurare, sia nello spostamento iterativo dell'unità di misura si pongono problemi di INVARIANZA.

Perché la suddivisione di un rettangolo in 12 quadratini mediante lo spostamento di un quadratino-unità assuma davvero il carattere di una misurazione, è indispensabile che il b. riconosca preliminarmente sia che il rettangolo suddiviso ha la stessa area del rettangolo intero, sia che il quadratino-unità conserva l'area nel corso dei suoi spostamenti, indipendentemente dalle posizioni che occuperà nel rettangolo. È opportuno osservare che il riconoscimento di invarianze è la base per una interpretazione scientifica della realtà: non c'è pensiero scientifico se non c'è la capacità di individuare al di là dei mutamenti, l'invarianza, sia nel senso di quantità che si conservano (fisiche, temporali, numeriche, geometriche...), sia nel senso di rapporti stabili, che possono venir definiti mediante leggi precise.

La comprensione del concetto di misura non implica necessariamente la comprensione dell'uso di formule per il calcolo dell'area. Il calcolo dell'area attraverso una moltiplicazione aritmetica presuppone passaggi logici di natura complessa che il b. può eseguire solo se ha raggiunto lo stadio delle operazioni formali.

## ELEMENTI PER UNA UNITA' DIDATTICA SULLA MISURA

### 1. Motivazioni:

- 1.1 uso della misura in geometria,
- 1.2 uso della misura nelle scienze sperimentali (la quantificazione dei dati che emergono dall'osservazione implica la misura di grandezze);
- 1.3 uso della misura nella vita quotidiana.

Lo studio della misura è quindi fondamentale sia per un approccio corretto al metodo scientifico ( e quindi allo sviluppo delle capacità logiche) sia per una conoscenza di molti aspetti della vita attuale (capacità operativa di misurare), tenendo presente che la misura rappresenta uno dei più potenti strumenti di conoscenza della realtà, con la consapevolezza però dei limiti dell'errore insiti nella misura, anche per avvicinarsi ad una conoscenza più critica della scienza e dei suoi metodi di analisi quantitativa.

### 2. Prerequisiti: verifiche per individuare quanto già appreso nella scuola primaria, con particolare riferimento a:

- 2.1 differenza tra contare e misurare;
- 2.2 stima di grandezze utilizzando l'unità di misura più appropriata tra alcune indicate;
- 2.3 misura di segmenti disegnati usando i cm e/o i mm, oppure con una unità di misura data;
- 2.4 relazioni tra strumento di misura di grandezze e unità di misura;
- 2.5 relazioni tra varie unità di misura (equivalenze).

Molte volte si rileva che:

- a) molti non conoscono il significato di unità di misura e di strumento di misura;
- b) in qualche caso particolare non si sa usare la squadra;
- c) non c'è grande oculatezza nella scelta dell'unità di misura avente l'ordine di grandezza appropriata;
- d) esiste confusione tra grandezze lineari, di superficie, di volume.

### 3. Metodologia d'intervento:

- 3.1 discussione di vari esempi pratici da cui far emergere la differenza tra "contare" e "misurare" individuando il misurare come una azione che necessita di un campione di riferimento per poter determinarne la relazione con la grandezza da misurare;
- 3.2 necessità di uniformare i campioni (ad esempio misurare in "spanne" il proprio banco), da qui può emergere la motivazione ad un esame storico e geografico dello sviluppo delle varie unità di misura;
- 3.3 misura di una stessa grandezza con strumenti diversi (ad esempio segmenti con righello, metro da sarta, metro da falegname ecc.).

Da queste misure può emergere il fatto che gli strumenti possiedono precisioni diverse e che non si possono dare misure più accurate di quella che è la precisione dello strumento. Si possono fare analoghe considerazioni sui pesi (uso di bilance diverse, analogiche e digitali). Infine si può far rilevare l'importanza successiva di questa osservazione nel calcolo che deve perciò tener conto dell'approssimazione usata nella misura con quel particolare strumento.

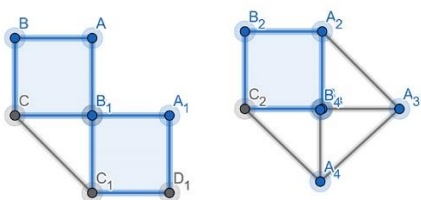
Infatti in un primo tempo la superficie è concepita, in base a intuizioni di tipo topologico, in funzione della linea che la racchiude. Il b. se non possiede gli strumenti intellettivi necessari, è portato a trasferire le nozioni apprese ed interiorizzate per la misura delle lunghezze, direttamente alle misure di superfici. È frequentissimo incontrare b. che, pur avendo appreso alla scuola primaria le formule per il calcolo delle aree, ricadono sistematicamente nell'errore di calcolare l'area del quadrato moltiplicando per quattro la lunghezza del suo lato.

Secondo Piaget, la difficoltà incontrata nel calcolo delle aree non sta tanto nella comprensione della moltiplicazione aritmetica e nemmeno nella sua applicazione alla misura di una superficie, quanto nel passaggio logico dalla linea alla superficie. A suo parere il b. riesce a capire questo passaggio solo quando riesce a concepire lo spazio a due dimensioni come un reticolo senza lacune formato da continui a una dimensione. È quindi l'elaborazione del concetto di continuo che permette il calcolo, attraverso la moltiplicazione aritmetica, di aree.

Sempre riguardo alla soluzione del problema del calcolo dell'area del rettangolo, Wertheimer sottolinea invece l'importanza della percezione dell'elemento strutturale, cioè del fatto che ogni fila di quadratini-unità in cui è suddiviso un rettangolo contiene lo stesso numero di quadratini (infatti questa è la base strutturale della moltiplicazione).

Si è visto che per poter cogliere il concetto di misura, il b. deve aver compreso l'invarianza della superficie al di là della suddivisione e dello spostamento. Un aspetto più generale della conservazione della superficie è quello che riguarda la comprensione dell'assioma euclideo riguardante l'equiestensione per somma e differenza di parti congruenti.

In un primo momento il b. riesce a cogliere l'equiestensione tra figure in cui sia evidente la relazione tra posizioni vuote e posizioni occupate da parti eccedenti, tipo:



Infatti figure come queste fanno percepire immediatamente la soluzione strutturale del problema, mettendo in moto nel b. l'intuizione, il pensiero produttivo (vedi studi di Wertheimer). Attraverso vari esempi in cui è posto di fronte alla trasformazione di superfici, composte di parti organizzate, in superfici composte dalle stesse parti, ma organizzate in modo diverso, il b. giunge a cogliere il concetto di equi estensione anche in figure in cui la percezione dell'invarianza delle superfici non è immediata.

Solo dopo questo tipo di intervento è opportuno introdurre il concetto di misura di superfici quadrate e rettangolari e quindi di superfici qualsiasi, trasformabili nelle

precedenti. Per alcuni b. il percorso descritto può essere semplificato, in quanto hanno già acquisito determinati concetti (come l'equiestensione e la misura per iterazione del campione) alle elementari.

Per altri, proprio l'eccesso di nozioni apprese ma non comprese, crea uno schermo alla comprensione degli elementi strutturali del problema. È quindi necessario, per questi, insistere con vari esempi del tipo descritto ed introdurre (o richiamare) la moltiplicazione aritmetica solo dopo aver verificato l'acquisizione dell'invarianza di una superficie.

Sono molto importanti questi tipi di considerazioni sulla relazione tra strumento di misura e grandezza da misurare in quanto diffusi nella vita pratica e nello stesso tempo momento fondamentale del metodo scientifico.

*3.4 Errori nella misura: dopo aver fatto misurare una data grandezza standard a tutti gli elementi della classe si tabulano i dati cercando di mettere in luce le differenze tra le varie misure. Risulta sempre difficile far avvicinare i ragazzi al discorso dell'errore intrinseco della misura in quanto non sempre riescono ad analizzare nel dettaglio le operazioni coinvolte indipendentemente dal caso particolare osservato, inoltre non tutti gli strumenti permettono una analisi intuitiva dell'errore.*

Ad esempio proviamo a misurare 10 cc di acqua in un becher utilizzando una pipetta graduata; oppure proviamo a misurare la massa di una data quantità di acqua e di sale separati e successivamente la massa della soluzione ottenuta. Si ripetono le prove più volte raccogliendo i dati in tabella. Altre esperienze si possono realizzare misurando il tempo trascorso in fenomeni opportuni, con orologi analogici e orologi digitali (che permettano di ottenere i decimi o centesimi di secondi). Tutte queste esperienze permetteranno di inquadrare questi aspetti:

a] la differenza tra misure attendibili e non attendibili;

b] la necessità di "mediare" i risultati confrontabili tra loro per ricavarne il valore medio e successivamente ci si porrà la domanda di come scegliere i risultati migliori (scarto dalla media);

c] se le esperienze sono correlate, ad esempio, a fenomeni fisici come il moto o la conservazione delle masse, abitueranno a considerare le interpretazioni scientifiche dei fenomeni (le leggi scientifiche) come interpretazioni statistiche e non assolute della realtà osservabile.

*3.5 Analisi di strumenti di misura di tipo diverso: letture di contatori e bollette della luce e del gas.*

*3.6 Ricerca di strumenti di misura più complessi quali quelli per le rilevazioni meteorologiche.*

*3.7 Misure indirette, ad esempio misura di segmenti con il compasso.*

#### **4. Obiettivi specifici**

4.1 uso di diversi strumenti di misura;

4.2 stima "ad occhio" della misura;

4.3 acquisizione del concetto di misura come confronto tra grandezze omogenee;

4.3.1 saper scegliere l'unità di misura adatta;

*4.3.2 conoscere le unità di misura convenzionali;*

*4.4 acquisizione del concetto che ogni misura contiene un errore:*

*4.4.1 saper apprezzare la precisione dello strumento di misura;*

*4.4.2 saper determinare l'approssimazione della misura;*

*4.4.3 conoscere i criteri per una valutazione statistica della misura.*

---

*Matematici, psicologi, filosofi ... citati:*

- Emma Castelnuovo (1913, 2014)
- Zoltan Paul Dienes (1916, 2014)
- Jean Piaget (1896, 1980)
- Max Wertheimer (1880; 1943)