Ritorno al 1979…I nuovi programmi della scuola media: corrispondenze e analogie strutturali

Le indicazioni presenti nei NP a proposito di questo titolo danno un duplice riferimento:

a) presentare in modo preciso alcuni spunti, momenti, situazioni più o meno approfonditi formalmente sui punti cardine dell'algebra moderna; i concetti di relazione-applicazione-operazione e il concetto di struttura di gruppo.
b) Non presentare in modo assiomatizzato il programma di matematica (ci si riferisce a programmi assiomatizzati come quelli della scuola di Bourbaki).

Nel complesso va colta l'occasione di presentare elementi unificanti di struttura negli argomenti che si presentano senza tuttavia ricondurre a un’unica assiomatizzazione l'intero curricolo matematico.

a) I concetti di cui sopra hanno a che vedere con quello di Insieme, su cui occorre puntualizzare alcune osservazioni, dal punto di vista didattico:
   1. per la formazione del concetto d’insieme sono importanti quelle abilità di analisi che permettono di individuare quali caratteristiche in comune deve avere un gruppo di elementi per costituire un insieme;
   2. inoltre devono essere svolte quelle abilità di inclusione / esclusione di elementi in un insieme data caratteristica e quindi quelle abilità che permettono di cogliere la distinzione operata dall'insieme tra il suo interno e l'esterno (universo),
   3. infine quelle abilità astrattive atte a far comprendere l'insieme come un ente matematico indipendente dalla natura degli elementi che contiene (ad esempio il significato di insieme vuoto).
b) Il concetto di relazione ci sembra essere un concetto particolarmente utile nell'unificare vari settori curricolari, sia a livello intuitivo sia a uno sufficientemente formalizzato. Le relazioni, inoltre, mettendo in evidenza uguaglianze e differenze tra oggetti, enti, persone sono alla base di processi di conoscenza. Il saper collegare fatti e situazioni, in altri termini, è una capacità fondamentale.

In modo particolare ci sembra utile sviluppare abilità operative e intellettive collegate con le:

1. *relazioni di equivalenza*;
2. *relazioni d'ordine*;

poiché la prima è responsabile della formazione di sistemi classificatori, in un dato insieme; la seconda è capace di ordinare gli elementi di un dato insieme.

Inoltre il concetto di relazione si può articolare in due aspetti algebrici fondamentali:
3. *il concetto di operazione*,
4. *il concetto di funzione*,
giustificati e formalizzati in rapporto al concetto di corrispondenza.

c) Il *concetto di Gruppo* si presenta in modo più problematico di quelli precedenti, in quanto struttura formale che per essere appresa ha bisogno di una struttura intellettiva formale già presente (Piaget) che non sempre è possibile verificare negli alunni della scuola dell'obbligo. D'altra parte i NP danno indicazioni precise: cogliere ogni volta che si presenti l'occasione analogie e differenze tra situazioni diverse. Quindi se da una parte ci sembra utile e significativo costruire e presentare alcune situazioni matematiche che si prestino a cogliere analogie strutturali, dall'altra ci sembra prematuro fissarne le chiavi formali.

Motivazioni, capacità, abilità collegate al concetto di Relazione

Tre ci sembrano le motivazioni principali collegate allo sviluppo di esperienze formative collegate al concetto di relazione:

1. sviluppare e formalizzare abilità del porre in corrispondenza elementi in un insieme o elementi tra due insiemi;
2. sviluppare e formalizzare l'uso e il significato della relazione di equivalenza per rinforzare le

abilità di classificazione;
3. sviluppare e formalizzare l'uso e il significato della relazione d'ordine per rinforzare le abilità relative alle capacità di seriazione, sequenzialità, scelte dicotomiche ordinate.

Tutti e tre questi gruppi di abilità sono collegati a capacità operative e intellettive caratterizzanti il passaggio dallo stadio operazionale concreto a quello formale (Piaget) in quanto si passa, in tutti e tre i gruppi, da fasi manipolative concrete all'astrazione delle caratteristiche formali corrispondenti a quelle operazioni concrete.

Specifichiamo ulteriormente:

1.1) prerequisiti alle abilità di corrispondenza:
  - 1.1.1. capacità di cogliere differenze / somiglianze in insiemi concreti
  - 1.1.2. capacità di collegare "oggetti concreti" tra cui sia evidente e intuitiva la relazione.

1.2) Prerequisiti ad abilità di classificazione:
  - 1.2.1. capacità di individuare e cogliere qualità omogenee in gruppi di oggetti;
  - 1.2.2. capacità di fare raggruppamenti su "oggetti concreti" in base a qualità comuni;
  - 1.2.3. capacità di comporre qualità in modo da poter svolgere composizioni di raggruppamenti.

Teniamo presente che carenza nelle capacità di classificazione, in ambiti concreti, non permettono di sviluppare quell'analisi di varianze / invarianze caratteristica del pensiero formale.

1.3) Prerequisiti ad abilità d'ordine:
  - 1.3.1. capacità di allungare, inserire dentro una serie, ordinare sulla base di determinate qualità;
  - 1.3.2. capacità di mettere in sequenza oggetti secondo schemi ordinati.

Occorre infine specificare che questi tre gruppi di prerequisiti s'intersecano a vicenda in quanto non è possibile isolare un aspetto classificatorio da quello ordinativo il quale a sua volta determina una corrispondenza (del tipo, ad esempio, "prima / dopo").

Contenuti relativi all'acquisizione del concetto di Relazione

Nello schema che è presentato non è preso in considerazione il concetto di operazione, che sarà svolto a parte per il suo carattere più specifico. Qui sono delineati i titoli, in sequenza temporale che possono essere sviluppati per suscitare le abilità e le capacità di cui sopra.

Classe Prima

- Attività di rinforzo delle abilità di classificazione, raggruppamento, ordinamento, seriazione, sequenzialità con materiali concreti; individuazione delle qualità costanti e variabili; costruzioni grafiche relative. Questo lavoro, la cui necessità è facilmente rilevabile, si presta a essere svolto in modo multidisciplinare collegando le Scienze, tecnologia, Linguistica...
- Introduzione del concetto di Relazione attraverso il modello dei Grafi: ...è precedente di...; ...è successivo di …; ...è maggiore/minore di insieme N; individuazione della "regola" responsabile di una serie; completamento, inserimento in una serie, etc.
- Costruzione della relazione d'ordine: ...è divisore di...; ...è multiplo di... nell'insieme N. Molto utile l'uso dell'algoritmo euclideo nella ricerca del MCD in quanto costituisce una struttura d'ordine dicotomica. Questo algoritmo può essere confrontato con strutture dicotomiche che lavorano su insiemi diversi, ad esempio chiavi analitiche o sequenze ordinate rintracciabili da facili letture. Inoltre la ricerca del MCD e del mcm si prestano all'introduzione dei diagrammi di Venn (anche non formalizzato) dell'intersezione e dell'unione.
- Classificazione dei numeri N in pari/dispari, in classi di resto di modulo 2, 7 ….(vedi struttura di gruppo!);
- classificazioni in classi di equivalenza degli operatori frazionari;
- uso della relazione di equivalenza nella misura di lunghezze riferite a una lunghezza data.

Classe seconda

a) Poiché lo studio delle trasformazioni geometriche occupa molto spazio nell'itinerario relativo alla struttura di gruppo, va specificato che le trasformazioni geometriche sono sempre leggibili come corrispondenze biunivoche tra i punti dalle due figure in relazione. Occorre trovare e discutere anche esempi di corrispondenze non biunivoche per far cogliere la differenza.
b) Se le trasformazioni sono svolte nel piano cartesiano si possono evidenziare le corrispondenze tra insiemi di coppie di coordinate. Uno studio più sistematico, dal punto di vista algebrico, può essere svolto più avanti.
c) Uso della relazione di equivalenza: …ha area equivalente a …, su insiemi di figure piane, nello studio della misura di aree. In tal modo si può cogliere una partizione in classi equivalenti e porre ogni classe in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri razionali, usando una superficie come campione.

Classe terza

a) Dalle esperienze precedenti è possibile formalizzare le proprietà della relazione di equivalenza.
b) Riflessioni sulle corrispondenze in insiemi numerici (ad esempio "…è quadrato di …" nell'insieme Q), non per tutti gli elementi è possibile chiudere l'enunciato aperto. Ciò può giustificare l'introduzione del numero irrazionale oppure la relazione "…è quadrato di …" nell'insieme R richiede l'introduzione dei numeri immaginari.
c) L'introduzione del concetto di funzione permette di unificare adatte esperienze precedenti di corrispondenze e di esperienze collegate alle operazioni:
    1. Costruire attraverso la sequenza di operazioni una corrispondenza tra due insiemi numerici;
    2. Rintracciare la sequenza di operazioni presenti in una data corrispondenza;
    3. Costruire la sequenza di operazioni della funzione inversa;
    4. Rappresentare funzioni sul piano cartesiano;
    5. Costruire composizioni di funzioni;
    6. Formalizzare le trasformazioni geometriche (o alcune) nel piano cartesiano come funzioni algebriche.

Motivazioni, capacità, abilità, collegate al concetto di operazione.

1. Come si può vedere, successivamente, non si può sviluppare il concetto di gruppo senza definire quello di operazione.
   Pur essendo integrabile dentro il concetto di corrispondenza, per le sue implicazioni con i contenuti complessivi del programma di matematica e per essere un concetto che interseca aspetti diversi della materia ha bisogno di una particolare attenzione da parte dell'insegnante.
2. Una seconda motivazione risiede nel valore intellettivo, generale, del concetto di operazione. Qualsiasi esperienza trasformativa operata da un soggetto può, in qualche modo, essere descritta come "operazione su qualcosa per ottenere qualcos'altro". Rintracciare nell'ambiente umano e naturale questo elemento strutturale è un'esperienza che permette, da una parte, una più razionale lettura dell'esistente, dall'altro, permette di avere uno strumento che unifica esperienze diverse.
3. Infine vale sempre quanto si dirà per la struttura di gruppo: l'esperienza cognitiva dell'intelletto può essere spiegata in termini operazionali. Solo attraverso un'interazione attiva con l'oggetto della conoscenza è possibile sviluppare un pensiero produttivo (Wertheimer), interazione che passa attraverso operazioni ben precise (cioè finalizzate a un risultato, a partire da un dato iniziale) quali: raggruppamenti, riorganizzazioni, strutturazioni etc.

Per quanto riguarda capacità e abilità richieste occorre distinguere due livelli di apprendimento:

a) Il caso di bambini che si presentano alla scuola media senza l'acquisizione del concetto di operazione, ma solo con un uso meccanico dell'operazione con i numeri;
b) Il caso di bambini che sanno trasferire il concetto di operazione in situazioni diverse, ma non conoscono proprietà e aspetti strutturali collegati al concetto di relazione.

I due livelli sono collegati dal fatto che non è possibile acquisire il concetto di operazione se non si coglie l'aspetto "operatorio" della relazione implicita NELL'OPERAZIONE.
E' quindi molto importante che i ragazzi abbiano molta pratica nell'operare sugli stati come nel determinare gli stati.
Per una pratica del genere è consigliabile fare "eseguire un'operazione" in termini manipolativi facilitando la percezione dello stato iniziale e finale: in altre parole il carattere "operatorio" consiste nel compiere l'operazione e percepire la variazione tra stato iniziale e stato finale.

4. In sintesi possiamo evidenziare queste capacità di base:
   4.1 Comprensione della differenza tra stati (iniziale e finale) e "operatori" (intesi come la regola, la legge, l'azione che produce la trasformazione);
   4.2 Capacità di operare sugli stati per ottenere altri stati;
   4.3 Capacità di operare sugli "operatori" per ottenere "operatori equivalenti";
   4.4 Infine va aggiunta la capacità di invertire "l'operatore". Questa capacità logico-percettiva sta a monte del discorso dell'operazione in quanto è un requisito essenziale del pensiero operazionale: ricostruire l'azione a patire dallo stato finale per ritornare allo stato iniziale, cioè aver reso il pensiero capace di un'azione reversibile (Piaget).

Contenuti relativi all'acquisizione del concetto di operazione

Vediamo un itinerario di contenuti relativi ai punti precedenti.

Classe prima

a. È introdotto il modello del grafo, come modello di simbolizzazione dell'"operatore" (si collega anche alle relazioni…)
b. sono studiati i grafi e le operazioni come relazioni di N in se stesso, ad esempio:
   $2 \xrightarrow{+3} 5$
c. Nella risoluzione di enunciati aperti si formalizzano le relazioni tra operazioni dirette e inverse. Si faranno osservazioni tra i diversi comportamenti in N degli elementi delle coppie (+;-) e (x ; :).
d. Introduzione dell'operatore frazionario: tra i diversi modi introduzione si può usale l'algoritmo euclideo (nel suo modello geometrico) in cui l'operatore frazionario acquista la valenza di rapporto tra lunghezze.

Classe seconda

a. Nelle traslazioni si può evidenziare come il vettore possa descrivere, in termini operazionali, la corrispondenza tra figure.
b. Nella misura di superfici si può far notare che nel confronto tra la superficie campione e quella da misurare interviene un rapporto e quindi un operatore.
c. Nell'analisi delle relazioni di proporzionalità diretta e inversa tra grandezze omogenee si può evidenziare il diverso carattere operazionale.

Classe terza

a. Nello studio nel piano cartesiano delle isometrie si può evidenziare, come introduttivo alla descrizione algebrica, quali "operatori" intervengano a modificare le coordinate dei punti.
b. Osservazioni riassuntive su insiemi numerici e operazioni (vedi oltre il concetto di gruppo): differenze di comportamento delle operazioni aritmetiche nei vari insiemi numerici. Costruzioni di gerarchie strutturali.

Motivazioni, capacità, abilità collegate al concetto di gruppo.

Possiamo individuare tre motivazioni all'introduzione del concetto di gruppo:

1. La scuola dell'obbligo introduce e usa i numeri, in modo particolare quelli naturali, interi, razionali, reali. In questi ambiti molte situazioni si prestano a un'introduzione del concetto di gruppo;
2. La scuola dell'obbligo dovrebbe favorire la conoscenza, l'esplorazione e il controllo dell'ambiente. Nell'ambiente sono presenti in modo massiccio situazioni riconducibili alla simmetria, la quale si presta a uno studio di strutture di gruppo.
3. La teoria dell'apprendimento di Piaget si basa sul principio della trasformazione connesso al concetto di genesi e di costruzione. Ciò mette in evidenza il carattere operazionale del pensiero così come è caratterizzata dall'operazionalità la struttura di gruppo di Galois. Dal punto di vista pedagogico questo isomorfismo è di fondamentale importanza poiché ogni sistema strutturale è aperto in quanto ogni struttura può essere inserita in un'altra di grado superiore. Dal punti di vista di Piaget questa struttura intellettiva è come "il distillato" di una serie di esperienze con sistemi aventi una struttura di questo tipo.
4. Dal punto di vista educativo possiamo intervenire su due piani:

a) Sviluppare situazioni didattiche in cui sia possibile cogliere analogie strutturali;
b) Introdurre il concetto di struttura di gruppo.

E' evidente che il punto a) costituisce un pre-requisito per il punto successivo, così come lo sono l'acquisizione del concetto di insieme, di relazione, di legge di composizione.
D'altra parte in qualsiasi occasione presentata, i bambini potranno cogliere la presenza di uno schema formale, interpretativo o descrittivo, solo se, attraverso il confronto, sapranno evidenziare differenze, somiglianze, la presenza o meno di caratteristiche costati in enti matematici diversi.

5. Dal punto di vista delle capacità e abilità specifiche possiamo mettere in evidenza quelle collegate al:

5.1 concetto di operazione binaria
5.2 concetto di chiusura
5.3 concetto di elemento identità
5.4 concetto di inverso
5.5 concetto di associatività e commutatività
5.6 costruzione delle tabelle moltiplicative e loro uso.

Alcune osservazioni:

Il concetto di operazione binaria deve essere sviluppato in varie situazioni, da quelle numeriche a quelle geometriche passando da una fase intuitiva a una più formalizzata all'interno del concetto di relazione. I punti da 5.2 al 5.5 sono collegati e conseguenti con il primo!
Va segnalato invece il punto 5.6 in quanto attraverso le tavole di composizione si possono evidenziare i caratteri strutturali di insiemi di elementi e l'isomorfismo tra due diversi gruppi. Occorre abituare a invertire l'ordine delle righe e delle colonne per ottenere tabelle ordinate nello stesso modo per poter fare un confronto.

5.7 sulla base di questi obiettivi specifici è possibile sviluppare due passaggi formali sul concetto di gruppo, alla conclusione della scuola dell'obbligo:

5.7.1 la formulazione degli assiomi di un gruppo mediante astrazione dalle proprietà comuni a gruppi specifici che sono stati presentati ai ragazzi nelle classi precedenti;
5.7.2 l'introduzione al concetto di isomorfismo tra i gruppi.

Contenuti relativi all'acquisizione del concetto di gruppo

Svolgiamo una sequenza di contenuti delineando i titoli di possibili esperienze a partire dalla classe prima:

Classe prima

a. Classificazione dei numeri N in pari e dispari (tabelle additive)
b. Classificazione dei numeri N in classi di resto di modulo n(2,3,7,12) (i moduli con n=7 e n=12 sono motivanti all'introduzione dell'argomento), costruzione delle tabelle additive (vedi la cosiddetta aritmetica dell'orologio)
c. Riesame delle operazioni in N per fissare le proprietà, confrontando e collegando con i due punti precedenti: distinzione tra operazioni chiuse o no rispetto a N, identificazione dell'elemento identità, dell'inverso, se esiste.

Classe seconda

a. Individuazione nell'ambiente umano e naturale degli aspetti geometrici collegabili alla simmetria e alla traslazione.
b. Analisi della simmetria assiale con costruzioni geometriche nel piano e nel piano cartesiano. Identificazione della simmetria centrale come risultato della composizione di simmetrie assiali. La composizione di simmetrie centrali come trasformazione identità.
c. Analisi della simmetria rotazionale, composizioni in poligoni. Presentare l'analogia tra le tavole di composizione delle simmetrie rotazionali (sul baricentro) di poligoni regolari con n(lato)=3 e l'aritmetica di modulo 3. In generale le tavole di composizione di rotazioni in poligoni regolari con n>3 e composizione di tutte le simmetrie. In queste composizioni di trasformazioni porre sempre l'accento sulla ricerca dell'elemento identità, la costruzione dell'inverso, etc.
d. Analisi geometria della traslazione: individuazione del vettore responsabile della traslazione, confronto tra il modello geometrico e quello vettoriale nella descrizione della trasformazione.
e. Introduzione delle similitudini attraverso le omotetie.

Classe terza

a. E' necessario concludere le esperienze svolte in precedenza operando una classificazione finalizzata all'individuazione di quegli insiemi di enti matematici in cui sia presente un'operazione binaria caratterizzata da: associatività, elemento neutro, invertibilità.
b. Una volta classificate e ordinate si possono confrontare le varie strutture alla ricerca di quelle isomorfe.
c. Infine si può operare con un procedimento inverso: data una serie di tavole di composizione rintracciare gli elementi caratterizzanti la tavola e quindi ricercare gli isomorfismi.